Namjena ovih zadataka, datih na papiru, je da na času studenti ne budu opterećeni pisanjem teksta zadatka nego **da se koncentrišu na** njihova **rješenje** (kao i da **postavljaju pitanja** kako u vezi postavke zadataka tako i za rješenja). Često samim pisanjem postavke zadatka dovodi do zamora i gubitka koncentracije studenta. Neki zadaci sa papira će namjerno biti ostavljeni studentima za vježbu – pripremiti jednu oblast iz Matematike za ispit nije moguće ako samostalno ne uradite određen broj primjera. **Sva rješenja zadataka možete pogledati u svesci sa vježbi** iz predmeta „Inžinjerska matematika III“, koju možete skinuti sa stranice *http://ff.unze.ba/nabokov/*. U svesci se nalaze i neki zadaci koji nisu na ovom papiru, kao i sav dio teorije koja pomaže puno boljem razumijevanju gradiva. Jedna od poznatih latinskih izreka je: **Površnost razumijevanja je majka neuspjeha.**

Uvod u Teoriju vjerovatnoće

1. Prostor uzoraka i događaja

1. Odrediti prostor uzoraka u sljedećim eksperimentima:
   (a) Eksperiment koji se sastoji od bacanja (okretanja) novčića;
   (b) Eksperiment koji se sastoji od bacanja (kotrljanja) kocke;
   (c) Eksperiment koji se sastoji od bacanja (okretanja) dva novčića;
   (d) Eksperiment koji se sastoji od bacanja (kotrljanja) dvije kocke;
   (e) Eksperiment koji se sastoji od mjerenja životnog vijeka nekog auta.
2. Posmatrajmo eksperimente (a), (b), (c), (d) i (e) iz prethodnog zadatka. Navesti po jedan ili dva primjera događaja iz svakog od ovog eksperimenta.
3. Pomoću Venne-ovog dijagrama predstaviti događaje $A \cup B$, $A \cap B$, A i B kao disjunktne događaje, i A^C.
4. (a) Posmatrajmo eksperiment bacanja (okretanja) novčića u kome je prostor uzoraka $S = \{P, G\}$. Ako su dati događaji $E = \{P\}$, $F = \{G\}$ odrediti $E \cup F$, EF, E^C, F^C i S^C.
   (b) Posmatrajmo eksperiment bacanja (kotrljanja) kockice u kome je prostor uzoraka $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Ako su dati događaji $E = \{1,3,5\}$ i $S = \{1,2,3\}$ odrediti $E \cup F$, EF, E^C, F^C i S^C.
   (c) Posmatrajmo eksperiment u kome se bacaju dvije kockice (u kome se prostor uzoraka sastoji od 36 tački). Ako je dat događaj $E = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ odrediti E^C i S^C.
5. Odrediti prostor uzoraka sljedećim eksperimentima.
   (a) Eksperiment čiji je izlaz spol djeteta;
   (b) Eksperiment čiji je izlaz poredak završene utrke između 7 trkačih konja sa pozicijama 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7;
   Za iste eksperimente navesti primjer događaja.

2. Vjerovatnoće definisane na događajima

6. Posmatrajmo eksperiment bacanja (okretanja) novčića. Ako pretpostavimo da je pojava glave jednaka pojavi pisma odrediti vjerovatnoće događaja. Odrediti i vjerovatnoće događaja pod pretpostavkom da je pojava glave dva puta vjerovatnija od pojave pisma.

7. Posmatrajmo eksperiment bacanja (kotrljanja) kockice, i pretpostavimo da svih šest brojeva imaju jednaku mogućnost pojavljivanja. Odrediti $P(\{1\})$, $P(\{2\})$, $P(\{3\})$, ..., $P(\{6\})$ i $P(\{2,4,6\})$.

8. Posmatrajmo eksperiment bacanja dva obična novčića. Ako su dati događaji

$$E=\{(G,G),(G,P)\} \text{ i } F=\{(G,G),(P,G)\}$$

(tj. E je događaj da se na prvom novčiću pokaže glava, a F je događaj da se na drugom novčiću pokaže glava), izračunati $P(E\cup F)$.

9. Kutija sadrži tri kuglice: jednu crvenu, jednu zelenu i jednu plave boje. Posmatrajmo eksperiment koji se sastoji od uzimanja jedne kuglice iz kutije, pa uzimanja druge kuglice iz kutije. Šta je prostor uzoraka? Ako, u svakom trenutku, svaka kuglica iz kutije ima jednaku mogućnost da bude izabrana, kolika je vjerovatnoća svake tačke iz prostora uzoraka.
10. U nekoj sportskoj kladionici postoji igra utrka cuka, u kome se šest cuka takmiče u trčanju do cilja. Neki čovjek koristi sljedeći sistem klađenja na cuke. On ulaže 1 KM na cuku sa crvenom bojom. Ako taj cuko pobjedi on završava sa klađenjem. Ako izgubi on drugi put ulaže 2 KM na istog cuku i bez obzira na ishod on završava sa klađenjem. Pretpostavljajući da je vjerovatnoća svake opklade $\frac{1}{2}$, izračunati kolika je vjerovatnoća da čovjek ode kući kao pobjednik? Zašto ovaj sistem klađenja ne koristi niko?
11. U nekom eksperimentu događaj A nastupa sa vjerovatnoćom $P(A)=\frac{1}{3}$. Koliko pokusa treba napraviti da bismo s vjerovatnoćom $0{,}99$ mogli očekivati bar jedno pojavljivanje događaja A.
12. Kažemo da je $E\subseteq F$ ako je svaka tačka iz E također u F. Pokazati da ako je $E\subseteq F$ tada je

$$P(F)=P(E)+P(FE^C)\geq P(E)$$

3. Uslovna vjerovatnoća

13. Posmatrajmo eksperiment u kome bacamo dvije kockice jednu iza druge. Nakon bacanja smo primjetili da je prva kockica 4. Kolika je vjerovatnoća da suma dvije kockice bude jednako 6?
14. Pretpostavimo da se u šeširu nalaze karte sa brojevima od jedan do deset, da su izmiješane i da izvlačimo jednu kartu. Ako znamo da je broj na izvučenoj karti najmanje pet, izračunati kolika je uslovna vjerovatnoća da je broj na karti 10?
15. Neka familija ima dvoje djece. Kolika je uslovna vjerovatnoća da su oba djeteta dječaci, ako nam je dato da je najmanje jedno dijete dječak.
16. Suljo kao izborni predmet može da izabere kurs iz informatike ili iz hemije. Ako Suljo izabere kurs iz informatike, tada vjerovatnoća da predmet položi sa desetkom u indeksu iznosi $\frac{1}{2}$; a ako izabere kurs iz hemije vjerovatnoća da dobije desetku iznosi $\frac{1}{3}$. On je odlučio da ovu važnu odluku donese bacanjem običnog novčića. Kolika je vjerovatnoća da Suljo dobije desetku iz hemije.
17. Pretpostavimo da kutija sadrži sedam crnih kuglica i pet bijelih kuglica. Dvije kuglice izvlačimo iz kutije bez njihovog vraćanja nazad. Ako pretpostavimo da svaka kuglica u kutiji ima jednaku vjerovatnoću da bude izvučena, izračunati vjerovatnoću da obe izvučene kuglice budu crne.
18. Pretpostavimo da su neka tri čovjeka na zabavi bacili svoj šešir u centar sobe. Šeširi su se prvo izmiješali a onda je svaki čovjek na slučajan način izabrao šešir. Kolika je vjerovatnoća da ni jedan od tri čovjeka nisu izabrala svoj vlastiti šešir?

Prostor događaja

Neka je Ω skup, i neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Familija $\mathcal{F}$ podskupova skupa Ω je **σ-polje** nad Ω, odnosno, uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ je **prostor događaja** ukoliko važi:

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$, (2) ako je $A \in \mathcal{F}$, tada je i $\overline{A} \in \mathcal{F}$,

(3) ako je $\forall i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{F}$, tada je i $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

U tom slučaju, elementi familije $\mathcal{F}$ su **događaji**, skupove $\emptyset$ i Ω interpretiramo redom kao **nemoguć događaj** i **siguran događaj**, a za događaj $A \in \mathcal{F}$, njemu odgovarajući komplement $\overline{A} \in \mathcal{F}$ interpretiramo kao **suprotan događaj događaja** A. Elemente ω skupa Ω nazivamo **elementarnim događajima**.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ prostor događaja, i neka su $A \in \mathcal{F}$ i $B \in \mathcal{F}$ neki događaji. U teoriji verovatnoće je uobičajeno da se umesto oznake $A \cap B$ koristi oznaka $A \cdot B$ ili jednostavno AB, a za disjunktne događaje A i B ($A \cap B = \emptyset$) se umesto $A \cup B$ koristi oznaka $A + B$ čime se u samom zapisu naglašava da se radi o disjunktnim događajima. Pri tome operacije sa skupovima (događajima) interpretiramo na sledeći način:

AB	-	„**realizovala su se oba događaja** A **i** B”,
$A \cup B$	-	„**realizovao se bar jedan od događaja** A **i** B”,
$A + B$	-	„**realizovao se bar jedan od disjunktnih događaja** A **i** B” (radi o disjunktnim događajima, zato $A + B$ tačnije interpretiramo sa „**realizovao se tačno jedan od disjunktnih događaja** A **i** B”),
$\overline{A}$	-	„**realizovao se suprotan događaj događaja** A”.

Prostor događaja $(\Omega, \mathcal{F})$ ima još i sledeće važne osobine:

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

(2) ako je $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $A_i \in \mathcal{F}$, tada je i $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$,

(3) ako je $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $A_i \in \mathcal{F}$, tada je i $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$,

(4) ako je $\forall i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{F}$, tada je i $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

---

[22] *Eksperiment se sastoji od jednog bacanja kockice za igru. Posmatrajmo događaje:*

A	-	*„pri bacanju je dobijen paran broj”,*
B	-	*„pri bacanju je dobijen neparan broj”,*
C	-	*„pri bacanju je dobijen broj manji od* 3*”.*

(a) *Napisati skup elementarnih događaja (ishoda eksperimenta)* Ω.

(b) *Napisati događaje* A, B *i* C *kao skupove elementarnih događaja.*

(c) *Koji su parovi događaja* A, B, C *disjunktni (nesaglasni, isključivi)?*

Rešenje:

(a) Označimo sa $\{\omega_i\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ događaj „*pri bacanju je dobijen broj* i”. Tada je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

(b) $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, $C = \{\omega_1, \omega_2\}$.

(c) Disjunktni su samo događaji A i B ($A \cap B = \emptyset$).

Uvod u Teoriju vjerovatnoće

1. Prostor uzoraka i događaja

Pretpostavimo da želimo izvršiti eksperiment čiji ishod nije moguće predvidjeti. Bez obzira, dok ishod eksperimenta ne može biti poznat unaprijed, pretpostavimo da je skup svih mogućih ishoda poznat. Ovaj skup svih mogućih ishoda eksperimenta je poznat kao prostor uzoraka eksperimenta i označava se sa S.

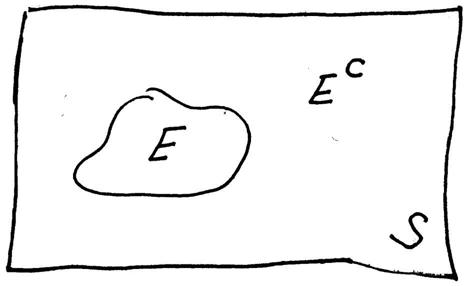
Bilo koji podskup E prostora uzoraka S je poznat kao događaj.

Za bilo koja dva događaja E i F prostora uzoraka S definišemo novi događaj $E \cup F$ koji sadrži sve izlaze koji su ili u E ili u F ili u oba (i u E i u F). Tj. događaj $E \cup F$ će se pojaviti ako se bar jedan ili E ili F pojavi. $E \cup F$ označava uniju događaja E i događaja F

Za bilo koja dva događaja E i F također možemo definisati novi događaj EF, koji se ponekad piše kao $E \cap F$, i naziva presjek događaja E i F. Ovaj događaj je definisan na sljedeći način: EF sadrži sve izlaze koji su u oba događaja, i u E i u F. Tj. događaj EF će se pojaviti samo ako se oba i E i F pojave.

Null događaj označavamo sa $\emptyset$ i tumačimo kao događaj koji ne sadrži ni jedan izlaz.

Na kraju, za bilo koji događaj E definišemo novi događaj E^c, koji nazivamo komplement od E, i definišemo da se sastoji od svih izlaza iz prostora uzoraka S koji nisu u E. Tj., E^c će se pojaviti ako i samo ako se ne pojavi E.



Odrediti prostor uzoraka u sljedećim eksperimentima:

(a) Eksperiment koji se sastoji od bacanja (okretanja) novčića;

(b) Eksperiment koji se sastoji od bacanja (kotrljanja) kocke;

(c) Eksperiment koji se sastoji od bacanja (okretanja) dva novčića;

(d) Eksperiment koji se sastoji od bacanja (kotrljanja) dvije kocke;

(e) Eksperiment koji se sastoji od mjerenja životnog vijeka nekog auta.

Rj.:

(a) Prostor uzoraka u eksperimentu koji se sastoji od bacanja novčića je

$$S = \{G, P\}$$

gdje G znači da je rezultat bacanja glava, a P znači da je rezultat bacanja pismo.

(b) Prostor uzoraka u eksperimentu koji se sastoji od bacanja kockice je

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

gdje izlaz i znači da je se i pojavila na kockici, $i = 1,2,3,4,5,6$.

(c) Prostor uzoraka u eksperimentu koji se sastoji u bacanju dva novčića su sljedeće četri tačke

$$S = \{(G,G), (G,P), (P,G), (P,P)\}.$$

Izlaz će biti (G, G) ako su oba novčića pokazala glavu; izlaz je (G, P) ako je prvi novčić pokazao glavu, a drugi pismo; dok je rezultat (P, G) ako je prvi pokazao pismo a drugi glavu; i na kraju biće (P, P) ako su oba novčića pokazala pismo.

(d) Prostor uzoraka u bacanju dvije kockice se sastoji od sljedećih 36 tački

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{Bmatrix},$$

gdje je izlaz (i, j) ako je na prvoj kocki pokazano i, a na drugoj kocki j.

(e) Prostor uzoraka u eksperimentu koji se sastoji u mjerenju životnog vijeka nekog auta su svi nenegativni realni brojevi. Tj.

$$S = [0, \infty).$$

(#) Posmatrajmo eksperimente (a), (b), (c), (d) i (e) iz prethodnog zadatka. Navesti po jedan ili dva primjera događaja iz svakog od ovog eksperimenta.

Rj.

(a') U primjeru (a), ako je $E=\{G\}$, tada je E događaj u kome se glava pojavila prilikom bacanja novčića. Slično, ako je $E=\{P\}$, tada će E biti događaj u kome se pojavilo pismo.

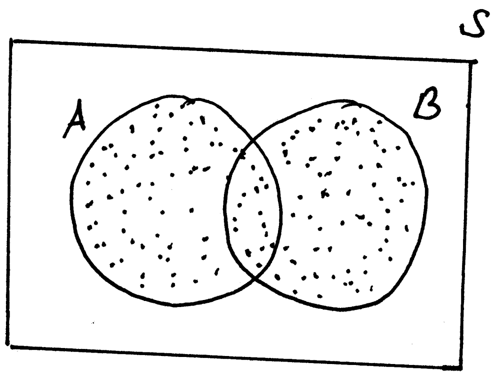
(b') U primjeru pod (b), ako je $E=\{1\}$ tada je E događaj da se jedinica pojavi prilikom bacanja kockice. Ako je $E=\{2,4,6\}$ tada će E biti događaj da se paran broj pojavi prilikom bacanja kockice.

(c') U primjeru pod (c), ako je $E=\{(G,G),(G,P)\}$, tada je E događaj da se pojavi glava na prvom novčiću.

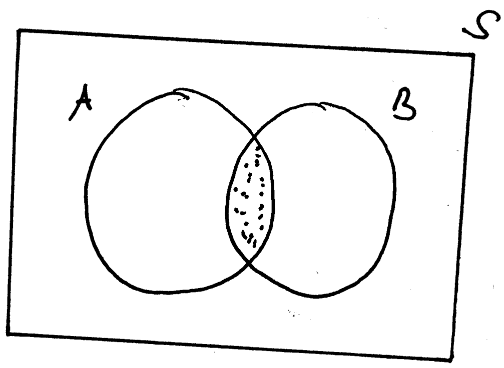
(d') U primjeru pod (d), ako je $E=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$, tada je E događaj da je suma kocki jednaka sedam.

(e') U primjeru pod (e), ako je $E=(2,6)$ tada je E događaj da će auto trajati između dvije i šest godina.

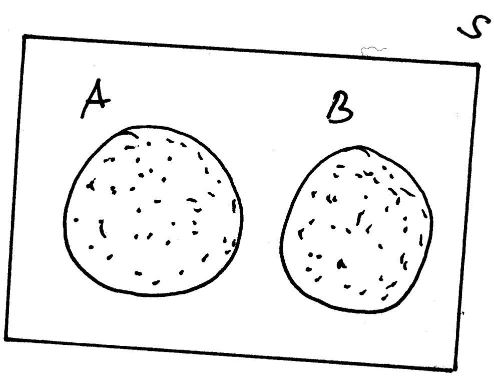
Grafičko predstavljanje događaja je vrlo korisno pomoću Venne-ovog dijagrama



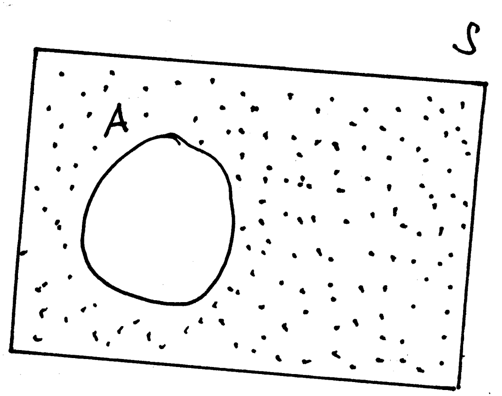
Venneov dijagram: tačkasti dio je $A \cup B$



Istačkani dio je $A \cap B$



A i B su disjunktni događaji



Istačkani dio je A^c

#

(a) Posmatrajmo eksperiment bacanja (okretanja) novčića u kome je prostor uzoraka $S=\{P,G\}$.
Ako su dati događaji $E=\{P\}$, $F=\{G\}$ odrediti $E\cup F$, EF, E^c, F^c, S^c.

(b) Posmatrajmo eksperiment bacanja (kotrljanja) kockice u kome je prostor uzoraka $S=\{1,2,3,4,5,6\}$.
Ako su dati događaji $E=\{1,3,5\}$ i $F=\{1,2,3\}$ odrediti $E\cup F$, EF, E^c, F^c, S^c.

(c) Posmatrajmo eksperiment u kome se bacaju dvije kockice (u kome se prostor uzoraka sastoji od 36 tački). Ako je dat događaj $E=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ odrediti E^c i S^c.

Rj.

(a) $E\cup F=\{G,P\}$, $EF=\emptyset$, $E^c=F=\{G\}$, $F^c=E=\{P\}$, $S^c=\emptyset$

(b) $E\cup F=\{1,2,3,5\}$, $EF=\{1,3\}$, $E^c=\{2,4,6\}$, $F^c=\{4,5,6\}$, $S^c=\emptyset$

(c) E^c je događaj u kome suma dvije kockice nije jednaka sedam

$S^c=\emptyset$

(#) Odrediti prostor uzoraka u sljedećim eksperimentima

(a) Eksperiment čiji je izlaz spol djeteta.

(b) Eksperiment čiji je izlaz poredak završene utrke između 7 trkaćih konja sa pozicijama 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7.

Za iste eksperimente navesti primjer događaja.

Rj.:

(a) Prostor uzoraka je $S = \{$dječak, djevojčica$\}$.

Ako je $A = \{$djevojčica$\}$ tada je A događaj da je dijete djevojčica. Ako je $B = \{$dječak$\}$, tada je B događaj da je dijete dječak.

(b)

Prostor uzoraka je $S = \{$sve permutacije 7-orke $(1,2,3,4,5,6,7)\}$.

Izlaz $(4, 1, 6, 7, 5, 3, 2)$ znači, na primjer, da je konj sa brojem 4 završio prvi, konj sa brojem 1 drugi, i tako dalje.

Ako sa A označimo

$$A = \{\text{svi izlazi sa } S \text{ koji počinju sa } 2\}$$

to znači da je A događaj da je konj sa brojem 2 pobijedio na utrci.

Neki zadaci koji slijede u ovoj lekciji i u dvije sljedeće lekcije, čiji su numeracija [23]-[30], [32]-[33] i [34]-[42] su posuđeni iz knjige "Zbirka rešenih zadataka iz Verovatnoće i statistike", autora Silvia Gilezan, Ljubo Nedović, Zorana Lužanin, Zoran Ovcin, Tatjana Grbić, Jelena Ivetić, Biljana Mihailović, Ksenija Doroslovački, izdanje Novi Sad, 2009. godine

[23] *Navesti skup elementarnih ishoda za sledeće eksperimente:*

(a) *bacanje jednog novčića,* (b) *bacanje jednog zlatnog i jednog srebrnog novčića,*

(c) *bacanje jednog zlatnog, jednog srebrnog i jednog bronzanog novčića,*

(d) *bacanje kockice za igru i jednog novčića,* (e) *bacanje dva puta kockice za igru,*

(f) *izvlačenje jedne kuglice iz kutije u kojoj se nalaze* 3 *bele,* 4 *crvene i* 2 *plave kuglice,*

(g) *izvlačenje dve kuglice iz kutije u kojoj se nalaze* 3 *bele,* 4 *crvene i* 2 *plave kuglice, pri čemu je bitan redosled izvučenih kuglica,*

(h) *izvlačenje dve kuglice iz kutije u kojoj se nalaze* 3 *bele,* 4 *crvene i* 2 *plave kuglice, pri čemu* nije *bitan redosled izvučenih kuglica,*

(i) *registrovanje ispravnosti jedne sijalice,* (j) *registrovanje ispravnosti tri sijalice.*

Rešenje:

(a) $\Omega = \{\omega_G, \omega_P\}$, gde je G događaj „*pri bacanju je pao grb*", a P je događaj „*pri bacanju je palo pismo*".

(b) $\Omega = \{\omega_{GG}, \omega_{GP}, \omega_{PG}, \omega_{PP}\}$, gde je ω_{XY} događaj „*pri bacanju zlatnog novčića je palo $X \in \{G, P\}$, a pri bacanju srebrnog $Y \in \{G, P\}$*", gde je sa G skraćeno označen *grb* a sa P *pismo*; primetimo da je $|\Omega| = \overline{\mathrm{V}}_2^2 = 4$.

(c) $\Omega = \{\omega_{PPP}, \omega_{PPG}, \omega_{PGP}, \omega_{PGG}, \omega_{GPP}, \omega_{GPG}, \omega_{GGP}, \omega_{GGG}, \}$, uz analogne oznake kao pod (b); primetimo da je $|\Omega| = \overline{\mathrm{V}}_3^2 = 8$.

(d) $\Omega = \{\omega_{1P}, \omega_{1G}, \omega_{2P}, \omega_{2G}, \omega_{3P}, \omega_{3G}, \omega_{4P}, \omega_{4G}, \omega_{5P}, \omega_{5G}, \omega_{6P}, \omega_{6G}\}$, gde brojevi u indeksu predstavljaju broj dobijen na kockici, a slova predstavljaju odgovarajuću stranu novčića.

(e) $\Omega = \{\omega_{ij} \mid i, j \in \{1, 2, \ldots, 6\}\}$, gde je ω_{ij} događaj „*pri prvom po redu bacanju je pao broj i a pri drugom po redu broj j*"; primetimo da je $|\Omega| = \overline{\mathrm{V}}_2^6 = 36$.

(f) $\Omega = \{\omega_b, \omega_c, \omega_p\}$, gde je ω_x događaj „*izvučena je kuglica boje $x \in \{b, c, p\}$*" gde navedeno slovo predstavlja prvo slovo naziva odgovarajuće boje.

(g) $\Omega = \{\omega_{bb}, \omega_{bc}, \omega_{bp}, \omega_{cb}, \omega_{cc}, \omega_{cp}, \omega_{pb}, \omega_{pc}, \omega_{pp}\}$, gde je ω_{xy} događaj „*prvo je izvučena kuglica boje $x \in \{b, c, p\}$ a zatim kuglica boje $y \in \{b, c, p\}$*" gde navedeno slovo predstavlja prvo slovo naziva odgovarajuće boje; primetimo da je $|\Omega| = \overline{\mathrm{V}}_2^3 = 9$.

(h) $\Omega = \{\omega_{bb}, \omega_{bc}, \omega_{bp}, \omega_{cc}, \omega_{cp}, \omega_{pp}\}$, gde je ω_{xy} događaj „*izvučena je jedna kuglica boje $x \in \{b, c, p\}$ i još jedna kuglica boje $y \in \{b, c, p\}$*" gde navedeno slovo predstavlja prvo slovo naziva odgovarajuće boje; primetimo da je $|\Omega| = \overline{\mathrm{C}}_2^3 = 6$.

(i) $\Omega = \{\omega_0, \omega_1\}$, gde je ω_0 događaj „*sijalica je neispravna*" a ω_1 događaj „*sijalica je ispravna*".

(j) $\Omega = \{\omega_{000}, \omega_{001}, \omega_{010}, \omega_{011}, \omega_{100}, \omega_{101}, \omega_{110}, \omega_{111}\}$, gde je ω_{ijk} događaj „*prva sijalica je u stanju i, druga u stanju j, a treća u stanju k, $i, j, k \in \{0, 1\}$*" pri čemu stanje 0 znači da je odgovarajuća sijalica *neispravna*, a stanje 1 da je *ispravna*.

---

[24] *Radnik je proizveo 3 artikla. Neka je X_i, $i \in \{1,2,3\}$ događaj „i-ti prozvedeni artikal je ispravan" (artikle razlikujemo po tome kojim redom su proizvedeni). Pomoću događaja X_i i $\overline{X}_i$ izraziti skup elementarnih ishoda kao i događaje*

- A - *„svi artikli su ispravni",*
- B - *„bar jedan artikal je neispravan",*
- C - *„tačno jedan artikal je ispravan",*
- D - *„najviše dva artikla su ispravna",*
- E - *„bar dva artikla su ispravna",*
- F - *„tačno dva artikla su neispravna".*

Rešenje:

$$\Omega = \{X_1X_2X_3, X_1X_2\overline{X}_3, X_1\overline{X}_2X_3, X_1\overline{X}_2\overline{X}_3, \overline{X}_1X_2X_3, \overline{X}_1X_2\overline{X}_3, \overline{X}_1\overline{X}_2X_3, \overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3\},$$

$A = \{X_1X_2X_3\}$,

$B = \overline{A} = \{X_1X_2\overline{X}_3, X_1\overline{X}_2X_3, \overline{X}_1X_2X_3, X_1\overline{X}_2\overline{X}_3, \overline{X}_1X_2\overline{X}_3, \overline{X}_1\overline{X}_2X_3, \overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3\}$,

$C = \{X_1\overline{X}_2\overline{X}_3, \overline{X}_1X_2\overline{X}_3, \overline{X}_1\overline{X}_2X_3\}$,

$D = B$,

$E = \{X_1X_2X_3, X_1X_2\overline{X}_3, X_1\overline{X}_2X_3, \overline{X}_1X_2X_3\}$,

$F = C$.

---

[25] *Meta se gađa sa 3 metka. Neka je S_i, $i \in \{1,2,3\}$ događaj „i-tim metkom je meta pogođena". Preko događaja S_i izraziti događaje*

- A - *„ostvarena su 3 pogotka",*
- B - *„ostvarena su 3 promašaja",*
- C - *„ostvaren je bar 1 pogodak",*
- D - *„ostvaren je bar 1 promašaj",*
- E - *„ostvarena su bar 2 pogotka",*
- F - *„ostvaren je najviše 1 pogodak".*

Rešenje:

$A = S_1S_2S_3$,

$B = \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3$,

$C = \overline{B} = \{S_1S_2S_3, S_1S_2\overline{S}_3, S_1\overline{S}_2S_3, S_1\overline{S}_2\overline{S}_3, \overline{S}_1S_2S_3, \overline{S}_1S_2\overline{S}_3, \overline{S}_1\overline{S}_2S_3\}$,

$D = \overline{A} = \{S_1S_2\overline{S}_3, S_1\overline{S}_2S_3, S_1\overline{S}_2\overline{S}_3, \overline{S}_1S_2S_3, \overline{S}_1S_2\overline{S}_3, \overline{S}_1\overline{S}_2S_3, \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3\}$,

$E = \{S_1S_2S_3, S_1S_2\overline{S}_3, S_1\overline{S}_2S_3, \overline{S}_1S_2S_3\}$,

$F = \overline{E} = \{S_1\overline{S}_2\overline{S}_3, \overline{S}_1S_2\overline{S}_3, \overline{S}_1\overline{S}_2S_3, \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3\}$,

---

[30] *Brod ima jedno kormilo, tri kotla i dve turbine. Neka A događaj „kormilo je ispravno", neka su B_i, $i \in \{1,2,3\}$ događaji „i-ti kotao je ispravan", i neka su C_i, $i \in \{1,2\}$ događaji „i-ta turbina je ispravna". Brod može da se kreće ako je ispravno kormilo, bar jedan kotao i bar jedna turbina. Preko navedenih događaja, izraziti događaj X: „brod može da se kreće".*

Rešenje: Označimo sa B događaj „*bar jedan kotao je ispravan*", a sa C događaj „*bar jedna turbina je ispravna*". Tada je

$$X = ABC$$

gde je $B = \overline{\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3} = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ i $C = \overline{\overline{C}_1\overline{C}_2} = C_1 \cup C_2$.

---

[26] *Iz skupa* $X = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ *se na slučajan način bira jedan broj, i neka je* $\Omega = X$ *skup elementarnih događaja tako da je* $i \in \Omega$ *događaj „iz skupa* X *je izabran broj* i*". Za događaje*

A	-	*„izabrani broj je manji od 7",*	C	-	*„izabrani broj je paran",*
B	-	*„izabrani broj je veći ili jednak sa 6",*	D	-	*„izabrani broj je neparan",*

navesti od kojih se elementarnih događaja sastoje, i rečima opisati događaje AB, $A(B \cup D)$, $\overline{A}B$, $\overline{A}C$, $\overline{A \cup D}$, $\overline{A \cup B \cup C}$, ABC *i* $ABCD$.

Rešenje: Iz $A = \{2,3,4,5,6\}$, $B = \{6,7,8,9,10,11,12\}$, $C = \{2,4,6,8,10,12\}$, $D = \{3,5,7,9,11\}$ sledi

$AB = \{6\}$ je događaj „*izabrani broj je* 6" (ili jednostavno „*izabrani broj je manji od* 7 *i veći ili jednak sa* 6"),

$A(B \cup D) = A \cap \{3,5,6,7,8,9,10,11,12\} = \{3,5,6\}$ je događaj „*izabran je jedan od brojeva* 3, 5, 6",

$\overline{A}B = \{7,8,9,10,11,12\} \cap B = \{7,8,9,10,11,12\}$ je događaj „*izabrani broj je veći od* 6",

$\overline{A}C = \{7,8,9,10,11,12\} \cap C = \{8,10,12\}$ je događaj „*izabran je paran broj koji je veći od* 6",

$\overline{A \cup D} = \overline{\{2,3,4,5,6,7,9,11\}} = \{8,10,12\} = \overline{A}C$ je događaj „*izabran je paran broj koji je veći od* 6",

$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{\Omega} = \emptyset$ je *nemoguć* događaj (izabrani broj nije manji od 7, i nije manji ili jednak sa 6, i nije paran, što je nemoguće),

$ABC = \{6\}$ je događaj „*izabrani broj je* 6",

$ABCD = \{6\} \cap D = \emptyset$ je *nemoguć* događaj (izabrani broj je manji od 7, i veći je ili jednak sa 6, i pri tome je i paran i neparan, što je nemoguće).

---

[27] *Baca se kockica za igru i posmatraju se događaji*

A	-	*„na kockici je pao broj manji od 4",*
B	-	*„na kockici je pao paran broj",*
C	-	*„na kockici je pao broj koji nije manji od 5".*

Navesti od kojih se elementarnih događaja sastoje i rečima opisati događaje $A \cup B$, $B \cup C$, $B \cap C$, $A \cap C$, $A \cup B \cup C$, $\overline{C}$, $\overline{B}$ *i* $A \cup (B \cap \overline{C})$.

Rešenje: Označimo elementarne događaje, kao u zadatku [26], brojevima koji predstavljaju broj koji je pao na kockici. Dakle, skup svih elementarnih događaja je $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, a događaji A, B i C su zapravo skupovi $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4,6\}$ i $C = \{5,6\}$. Sledi

$A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$ je događaj „*pao je broj različit od* 5",

$B \cup C = \{2,4,5,6\}$ je događaj „*pao je broj različit od* 1 *i* 3",

$B \cap C = \{6\}$ je događaj „*pao je broj* 6",

$A \cap C = \emptyset$ je *nemoguć* događaj (pao je broj koji je manji od 4 i veći je ili jednak sa 5, što je nemoguće),

$A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$ je *siguran* događaj,

$\overline{C} = \{1,2,3,4\}$ je događaj „*pao je broj manji od* 5",

$\overline{B} = \{1,3,5\}$ je događaj „*pao je neparan broj*",

$A \cup (B \cap \overline{C}) = A \cup (\{2,4,6\} \cap \{1,2,3,4\}) = \{1,2,3\} \cup \{2,4\} = \{1,2,3,4\}$.

---

[28] *Na nekoj raskrsnici se posmatra kretanje automobila a_1, a_2 i a_3 koji mogu da skreću ili levo ili desno, i sa A_i, $i \in \{1,2,3\}$ je označen događaj „automobil a_i na raskrsnici skreće desno". Preko A_i izraziti događaje*

X - *„sva tri automobila skreću na istu stranu",*
Y - *„više automobila je skrenulo u levu stranu",*
Z - *„ni jedan automobil nije skrenuo na levu stranu",*
W - *„prvi i treći automobil su skrenuli na istu stranu".*

Rešenje:

$X = \{A_1A_2A_3, \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\}$,

$Y = \{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3, A_1\overline{A}_2\overline{A}_3, \overline{A}_1A_2\overline{A}_3, \overline{A}_1\overline{A}_2A_3\}$,

$Z = A_1A_2A_3$,

$W = \{A_1A_2A_3, A_1\overline{A}_2A_3, \overline{A}_1A_2\overline{A}_3, \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\}$.

---

[29] *Četiri studenta polažu ispit, i S_i, $i \in \{1,2,3,4\}$ označava događaj „i-ti student je položio ispit", $i \in \{1,2,3,4\}$. Napisati skup elementarnih događaja Ω i preko događaja S_i izraziti događaje*

A - *„nijedan student nije položio ispit",*
B - *„položio je samo prvi student",*
C - *„položio je samo jedan student",*
D - *„položio je bar jedan student",*
E - *„položila su tačno dva studenta",*
F - *„položila su najviše dva studenta",*
G - *„položila su najmanje tri studenta",*
H - *„položila su najviše tri studenta".*

Rešenje: Siguran događaj

$$\begin{aligned}\Omega = \{&S_1S_2S_3S_4, S_1S_2S_3\overline{S}_4, S_1S_2\overline{S}_3S_4, S_1S_2\overline{S}_3\overline{S}_4,\\ &S_1\overline{S}_2S_3S_4, S_1\overline{S}_2S_3\overline{S}_4, S_1\overline{S}_2\overline{S}_3S_4, S_1\overline{S}_2\overline{S}_3\overline{S}_4,\\ &\overline{S}_1S_2S_3S_4, \overline{S}_1S_2S_3\overline{S}_4, \overline{S}_1S_2\overline{S}_3S_4, \overline{S}_1S_2\overline{S}_3\overline{S}_4,\\ &\overline{S}_1\overline{S}_2S_3S_4, \overline{S}_1\overline{S}_2S_3\overline{S}_4, \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3S_4, \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3\overline{S}_4\}\end{aligned}$$

se sastoji od $\mathrm{V}_4^2 = 16$ elementarnih događaja.

$A = \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3\overline{S}_4$,

$B = S_1\overline{S}_2\overline{S}_3\overline{S}_4$,

$C = \{S_1\overline{S}_2\overline{S}_3\overline{S}_4, \overline{S}_1S_2\overline{S}_3\overline{S}_4, \overline{S}_1\overline{S}_2S_3\overline{S}_4, \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3S_4\}$,

$D = \Omega \setminus \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3\overline{S}_4$,

$E = \{S_1S_2\overline{S}_3\overline{S}_4, S_1\overline{S}_2S_3\overline{S}_4, S_1\overline{S}_2\overline{S}_3S_4, \overline{S}_1S_2S_3\overline{S}_4, \overline{S}_1S_2\overline{S}_3S_4, \overline{S}_1\overline{S}_2S_3S_4\}$,

$F = A \cup C \cup E$,

$G = \{S_1S_2S_3\overline{S}_4, S_1S_2\overline{S}_3S_4, S_1\overline{S}_2S_3S_4, \overline{S}_1S_2S_3S_4, S_1S_2S_3S_4\}$,

$H = \Omega \setminus \{S_1S_2S_3S_4\}$.

---

2. Vjerovatnoće definisane na događajima

Posmatrajmo eksperiment čiji je prostor uzoraka S. Za svaki događaj E prostora uzoraka S, pretpostavićemo da je broj $P(E)$ definisan i da zadovoljava sljedeća tri uslova:

(i) $0 \leq P(E) \leq 1$

(ii) $P(S) = 1$

(iii) Za bilo koji niz događaja $E_1, E_2, \ldots$ koji su međusobno isključivi, tj. događaji za koje vrijedi da je $E_n E_m = \phi$ za $m \neq n$, tada

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

$P(E)$ tumačimo kao vjerovatnoća događaja E.

Verovatnoća događaja

Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ prostor događaja. **Verovatnoća** na $(\Omega, \mathcal{F})$ je funkcija $\mathsf{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ za koju važi

(1) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$,

(2) ako za niz događaja $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$ važi da je $A_i \cap A_j = \emptyset$ za sve $i \neq j$, tada je $\mathsf{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)$.

Ako za događaj B važi $\mathsf{P}(B) > 0$, tada se **uslovna verovatnoća** $\mathsf{P}(A|B)$ (događaja A pod uslovom da se ostvario događaj B) definiše sa

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Pri rešavanju zadataka ćemo koristiti sledeće važne osobine verovatnoće

- $$\mathsf{P}(\emptyset) = 0 \tag{1.1}$$
- $$\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}(\overline{A}) \tag{1.2}$$
  $$\mathsf{P}\left(A|B\right) = 1 - \mathsf{P}\left(\overline{A}|B\right) \tag{1.3}$$
- $$B \subseteq A \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(B) \leq \mathsf{P}(A) \tag{1.4}$$
- $$B \subseteq A \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(A \setminus B) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(B) \tag{1.5}$$
- Za svaki konačan skup događaja $S_1, S_2, \ldots, S_n$ važi
  $$\mathsf{P}(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) =$$
  $$= \sum_i \mathsf{P}(S_i) - \sum_{i<j} \mathsf{P}(S_i S_j) + \sum_{i<j<k} \mathsf{P}(S_i S_j S_k) + \ldots + (-1)^n \mathsf{P}(S_1 S_2 \ldots S_n) \tag{1.6}$$
  Na primer, za $n = 2$ i $n = 3$ je
  $$\mathsf{P}(S_1 \cup S_2) = \mathsf{P}(S_1) + \mathsf{P}(S_2) - \mathsf{P}(S_1 S_2) \tag{1.7}$$
  $$\mathsf{P}(S_1 \cup S_2 \cup S_3) =$$
  $$= \mathsf{P}(S_1) + \mathsf{P}(S_2) + \mathsf{P}(S_3) - \mathsf{P}(S_1 S_2) - \mathsf{P}(S_1 S_3) - \mathsf{P}(S_2 S_3) + \mathsf{P}(S_1 S_2 S_3) \tag{1.8}$$
  a kao jednu od posledica dobijamo i
  $$\mathsf{P}(S_1 S_2) = \mathsf{P}(S_1) + \mathsf{P}(S_2) - \mathsf{P}(S_1 \cup S_2) \tag{1.9}$$
- Za svaki konačan skup događaja $S_1, S_2, \ldots, S_n$ važi
  $$\mathsf{P}(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) =$$
  $$= \mathsf{P}(S_1) + \mathsf{P}(S_2 \overline{S_1}) + \mathsf{P}(S_3 \overline{S_2 S_1}) + \ldots + \mathsf{P}(S_n \overline{S_{n-1} S_{n-2} \ldots S_1}) \tag{1.10}$$
- Ako je $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq \ldots$, tada važi
  $$\mathsf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(S_i) \tag{1.11}$$
- Ako je $S_1 \supseteq S_2 \supseteq S_3 \supseteq \ldots$, tada važi
  $$\mathsf{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(S_i) \tag{1.12}$$

- Za svaki konačan skup disjunktnih događaja $S_1, S_2, \ldots, S_n$ važi
$$\mathsf{P}(S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(S_i) \tag{1.13}$$

- Za događaje $S_1, S_2, \ldots, S_n$ koji su nezavisni (u ukupnosti) važi
$$\mathsf{P}(S_1 S_2 \ldots S_n) = \mathsf{P}(S_1)\,\mathsf{P}(S_2)\ldots\mathsf{P}(S_n) \tag{1.14}$$

- Za događaje $S_1, S_2, \ldots, S_n$ važi
$$\mathsf{P}(S_1 S_2 \ldots S_n) = \mathsf{P}(S_1)\,\mathsf{P}(S_2|S_1)\,\mathsf{P}(S_3|S_1 S_2)\ldots\mathsf{P}(S_n|S_1 S_2 \ldots S_{n-1}) \tag{1.15}$$
ukoliko navedene uslovne verovatnoće postoje.

- Događaji $H_1, H_2, \ldots, H_n$ čine potpun sistem događaja ako važi:
$$\forall i, j,\ i \neq j \quad H_i \cap H_j = \emptyset, \qquad \sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega, \qquad \forall i \quad \mathsf{P}(H_i) > 0.$$
Za potpun sistem događaja $H_1, H_2, \ldots, H_n$ važi
$$\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i) = 1.$$

- Za događaj S i potpun sistem događaja $H_1, H_2, \ldots, H_n$ važi **formula totalne verovatnoće**
$$\mathsf{P}(S) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(S|H_i) \tag{1.16}$$
ukoliko navedene uslovne verovatnoće postoje.

- Za događaj S i potpun sistem događaja $H_1, H_2, \ldots, H_n$ važi **Bajesova formula**
$$\mathsf{P}(H_k|S) = \frac{\mathsf{P}(H_k)\,\mathsf{P}(S|H_k)}{\mathsf{P}(S)} = \frac{\mathsf{P}(H_k)\,\mathsf{P}(S|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(S|H_i)} \tag{1.17}$$
za svako $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ukoliko navedene uslovne verovatnoće postoje.

d određenim uslovima se verovatnoća događaja može izračunavati primenom tzv. plasove ili geometrijske definicije verovatnoće.

- **Laplasova definicija verovatnoće:** ako je zadovoljeno

  1°) skup svih mogućih elementarnih ishoda je konačan - na primer, neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$,

  2°) elementi se biraju na slučajan način, tj. svi elementarni ishodi ω_i su jednakoverovatni ($\mathsf{P}(\{\omega_1\}) = \mathsf{P}(\{\omega_2\}) = \cdots = \mathsf{P}(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$),

  tada je verovatnoća nekog događaja $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\} \subseteq \Omega$
$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{n} \tag{1.18}$$
(količnik broja „povoljnih elementarnih ishoda" i „ukupnog broja elementarnih ishoda").

- **Geometrijska definicija verovatnoće:** ako je zadovoljeno

  1°) skup Ω svih mogućih elementarnih ishoda, kao i događaj A čija se verovatnoća izračunava se mogu predstaviti kao merljive geometrijske oblasti - na primer kao duži čije dužine možemo odrediti, ili kao oblasti u ravni čije površine umemo odrediti (trouglovi, krugovi, njihovi delovi i sl.), ili kao trodimenzionalni objekti kojima umemo izračunati zapreminu (piramide, kocke, njihovi delovi i sl.),

  2°) elementi skupa Ω se biraju na slučajan način, tj. ravnopravan je izbor svake tačke,

  tada je verovatnoća nekog događaja A

$$\mathsf{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} \tag{1.19}$$

  gde je sa $m(A)$ označena mera (dužina, površina ili zapremina) oblasti koja odgovara događaju A, a sa $m(\Omega)$ je označena mera oblasti koja odgovara skupu Ω svih elementarnih ishoda (verovatnoća se dobija kao količnik mere „povoljnih elementarnih ishoda" i mere „svih mogućih elementarnih ishoda").

---

[32] *Svako od slova* `A`, `I`, `K`, `M`, `N`, `O` *je zapisano na po jedan listić papira, i listići se nasumice ređaju u niz. Izračunati verovatnoću da će se na ovaj način formirati reč* `KAMION`.

Rešenje: Pošto su sva slova različita, broj mogućih različitih rasporeda listića (elementarnih ishoda) je $\mathrm{P}_6 = 6! = 720$. Očigledno postoji samo jedan „povoljan raspored", a zbog nasumičnog ređanja listića su svi elementarni ishodi jednakoverovatni, te je na osnovu (1.18) verovatnoća formiranja reči `KAMION`

$$p = \tfrac{1}{720} \approx 0.0014.$$

---

[33] *Računar je sa spiska reči formiranih pomoću slova* `a`, `a`, `a`, `e`, `i`, `k`, `m`, `m`, `t`, `t` *odabrao jednu. Izračunati verovatnoću da je odabrana reč* `matematika`.

Rešenje: Koristeći isti princip kao u zadataku [32], dobija se verovatnoća

$$p = \tfrac{1}{\mathrm{P}^{10}_{3,2,2}} = \tfrac{1}{\frac{10!}{3!2!2!}} = \tfrac{3!2!2!}{10!} = \tfrac{24}{3628800} = \tfrac{1}{151200}$$

(ovaj put pri prebrojavanju mogućih elementarnih ishoda koristimo permutacije s ponavljanjem jer se među slovima od kojih se sastavlja reč nalaze 3 primerka slova `a`, 2 primerka slova `m` i 2 primerka slova `t`).

(#) Posmatrajmo eksperiment bacanja (okretanja) novčića. Ako pretpostavimo da je pojava glave jednaka pojavi pisma odrediti vjerovatnoće događaja. Odrediti i vjerovatnoće događaja pod pretpostavkom da je pojava glave dva puta vjerovatnije od pojave pisma.

Rj.:

(a) Prostor uzoraka je $S = \{G, P\}$.

Prema definiciji vjerovatnoće $P(S) = 1$. Imamo

$$P(\{G\}) = \frac{1}{2}, \qquad P(\{P\}) = \frac{1}{2}.$$

(b) $$P(\{G\}) = \frac{2}{3}, \qquad P(\{P\}) = \frac{1}{3}$$

(#) Posmatrajmo eksperiment bacanja (kotrljanja) kockice, i pretpostavimo da svih šest brojeva imaju jednaku mogućnost pojavljivanja. Odrediti $P(\{1\})$, $P(\{2\}), \dots, P(\{6\})$, i $P(\{2,4,6\})$.

Rj. $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, $P(\{1\}) = \frac{1}{6}$, $P(\{2\}) = \frac{1}{6}$, $P(\{3\}) = \frac{1}{6}$, $P(\{4\}) = \frac{1}{6}$, $P(\{5\}) = \frac{1}{6}$, $P(\{6\}) = \frac{1}{6}$.

$$P(\{2,4,6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

vjerovatnoća da se pojavi paran broj

Primjetimo

$$E \cup E^c = S$$

$$1 = P(S) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$$

$$\underline{P(E^c) = 1 - P(E)}$$

$$P(E) + P(F) = P(E \cup F) + P(EF)$$

$$\underline{P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)}$$

Isto tako $\underline{P(\phi) = 0}$,

Ako su data tri događaja E, F i G tada

$$P(E \cup F \cup G) = P((E \cup F) \cup G) =$$

$$= P(E \cup F) + P(G) - P((E \cup F)G)$$

Posmatrajmo eksperiment bacanja dva obična novčića. Ako su dati događaji

$$E=\{(G,G),(G,P)\} \quad i \quad F=\{(G,G),(P,G)\}$$

(tj. E je događaj da se na prvom novčiću pokaže glava, a F je događaj da se na drugom novčiću pokaže glava), izračunati $P(E\cup F)$.

Rj.:

$$S=\{(G,G),(G,P),(P,G),(P,P)\}$$

$$P(S)=1$$

$$P(\{G,G\})=\frac{1}{4}, \quad P(\{G,P\})=\frac{1}{4}, \quad P(\{P,G\})=\frac{1}{4}, \quad P(\{P,P\})=\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} P(E\cup F) &= P(E)+P(F)-P(EF) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-P(\{G,G\}) \\ &= 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Ovu vjerovatnoću smo naravno mogli izračunati i direktno

$$P(E\cup F)=P(\{G,G\},\{G,P\},\{P,G\})=\frac{3}{4}$$

(#) Kutija sadrži tri kuglice: jednu crvene, jednu zelene i jednu plave boje. Posmatrajmo eksperiment koji se sastoji od uzimanja jedne kuglice iz kutije, pa uzimanja druge kuglice iz kutije. Šta je prostor uzoraka? Ako, u svakom trenutku, svaka kuglica iz kutije ima jednaku mogućnost da bude izabrana, kolika je vjerovatnoća svake tačke iz prostora uzoraka?

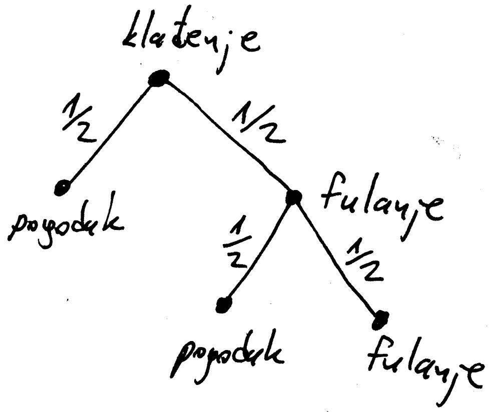
Rj: Prostor uzoraka je

$$S = \{(c,z), (c,p), (z,c), (z,p), (p,c), (p,z)\}$$

gdje, na primjer, (c,z) znači da je prva izvučena kuglica crvene boje, a druga zelene. Vjerovatnoća svakog od ovih izlaza je $\frac{1}{6}$.

#) U nekoj sportskoj kladionici postoji igra utrka cuka, u kome se šest cuka takmiče u trčanju do cilja. Neki čovjek koristi sljedeći sistem klađenja na cuke. On ulaže 1KM na cuku sa crvenom bojom. Ako taj cuko pobjedi on završava sa klađenjem. Ako izgubi, on drugi put ulaže 2KM na istog cuku i bez obzira na ishod on završava sa klađenjem. Pretpostavljajući da je vjerovatnoća svake opklade $\frac{1}{2}$, izračunati kolika je vjerovatnoća da čovjek ode kući kao pobjednik? Zašto ovaj sistem klađenja ne koristi niko?

Rj.:



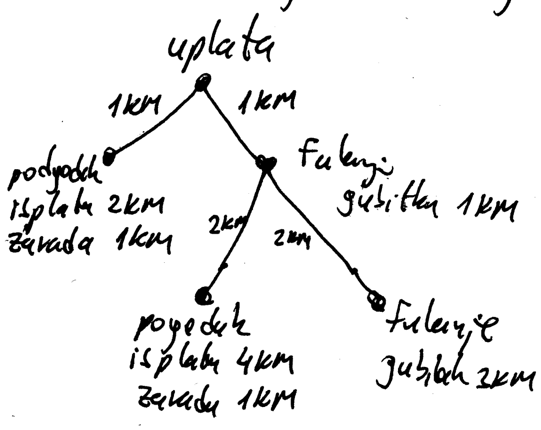
Prostor uzoraka u ovom slučaju je

$$S=\{p, (f,p), (f,f)\}$$

gdje je

$$P(\{p\})=\frac{1}{2}, \quad P(\{(f,p)\})=\frac{1}{4}, \quad P(\{(f,f)\})=\frac{1}{4}$$

Pretpostavimo da je koeficijent na cuki 2. Tada:

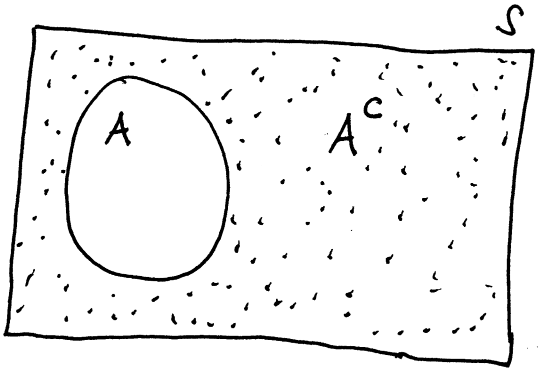


Ako je E događaj da ode kući kao pobjednik tada $P(E)=\frac{3}{4}$.

Ako pobjedi tada mu je zarada 1KM, ako izgubi na gubitku je 3KM.

(#) U nekom ekperimentu događaj A nastupa sa vjerovatnoćom $P(A)=\frac{1}{3}$. Koliko pokusa treba napraviti da bismo s yerovatnoćom 0,99 mogli očekivati bar jedno pojavljivanje događaja A?

Rj.:



$$P(A)=\frac{1}{3} \Rightarrow P(A^c)=\frac{2}{3}$$

$$\boxed{P(A)=1-P(A^c)}$$

Neka je D događaj: "da se u n pokušaja bar jednom realizuje događaj A".

Tada je

D^c: "da se u n pokušaja nijednom ne realizuje događaj A"

$$\Rightarrow \quad P(D^c)=\underbrace{P(A^c)\cdot P(A^c)\cdot \ldots \cdot P(A^c)}_{n \text{ puta}}=\left[P(A^c)\right]^n$$

$$\Rightarrow \quad P(D)=1-P(D^c)$$

tj. $0,99=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n=0,01$

$$\ln\left(\frac{2}{3}\right)^n=\ln(0,01)$$

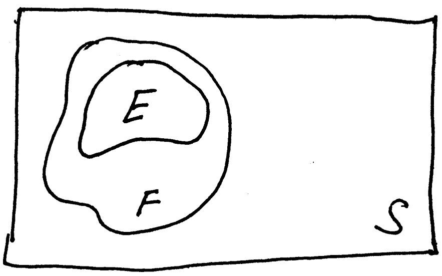
$$n=\frac{\ln(0,01)}{\underbrace{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}_{\ln 2-\ln 3}}\approx 11,35$$

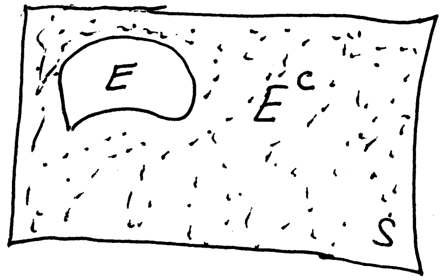
$\Rightarrow$ Ekperiment treba ponoviti 12 puta da bi se sa vjerovatnoćom 0,99 moglo očekivati bar jedno realizovanje događaja A.

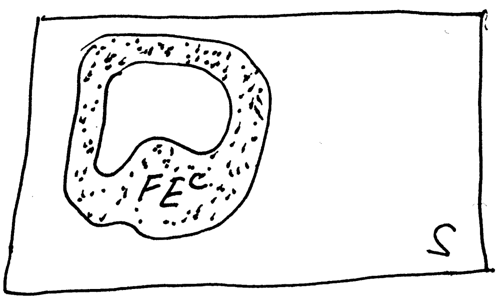
(#) Kažemo da je $E \subseteq F$ ako je svaka tačka iz E također u F. Pokazati da ako je $E \subseteq F$ tada je

$$P(F) = P(E) + P(FE^c) \geq P(E)$$

Rj.







E i E^c su disjunktni

$\Rightarrow$ E i FE^c disjunktni

pa imamo da je

$$F = E \cup FE^c$$

$$\Rightarrow \quad P(F) = P(E) + P(FE^c)$$

a kako iz definicije vjerovatnoće na događaju imamo da $0 \leq P(E) \leq 1$ za svaki događaj E to je $P(FE^c) \geq 0$

$$\Rightarrow \quad P(F) = P(E) + P(FE^c) \geq P(E)$$

[31] *Bacaju se dve kockice za igru. Izračunati verovatnoće događaja*

Q - *„kvadratni koren zbira palih brojeva biće ceo broj”,*
S_2 - *„zbir palih brojeva biće deljiv sa 2”,*
S_3 - *„zbir palih brojeva biće deljiv sa 3”,*
S_4 - *„zbir palih brojeva biće deljiv sa 4”,*

kao i događaja $Q \cup S_4$, S_2S_3, $S_2 \cup S_3$, S_3S_4, $S_2 \cup S_3 \cup S_4$ *i* $\overline{S_2 \cup S_3}$.

Rešenje: Zadatak možemo rešiti primenom Laplasove definicije, tj. primenom (1.18), ukoliko budu zadovoljeni uslovi za njenu primenu. Skup svih elementarnih ishoda je $\Omega = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ gde je (i, j) događaj „*na prvoj kockici će pasti broj* i*, a na drugoj kockici će pasti broj* j” (da bi elementarni ishodi bili jednakoverovatni, moramo razlikovati kockice kao prvu i drugu jer bi inače elementarni događaji (i, j) za $i \neq j$ bili dvostruko verovatniji od događaja (i, i); npr. ako je jedna kockica plava a jedna crvena tada brojeve 1 i 2 možemo dobiti tako što na plavoj padne 1 a na crvenoj 2 ili tako što na plavoj padne 2 a na crvenoj 1, dok dve jedinice možemo dobiti samo na jedan način, kada na obe kockice padne broj 1). Pri tome je $|\Omega| = 36$.

Direktnim proveravanjem dobijamo

$Q = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)\}$,

$$S_2 = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5),$$
$$(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$

(zbir dva broja je paran ako su oba broja parna ili oba neparna),

$S_3 = \{(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3), (6, 6)\}$,

$S_4 = \{(1, 3), (2, 2), (2, 6), (3, 1), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (6, 6)\}$,

te primenom (1.18) sledi (zadovoljeni su uslovi za primenu Laplasove definicije - skupovi su konačni, a elementarni ishodi su jednakoverovatni)

$$\mathsf{P}(Q) = \tfrac{7}{36}, \quad \mathsf{P}(S_2) = \tfrac{3\cdot3+3\cdot3}{36} = \tfrac{1}{2}, \quad \mathsf{P}(S_3) = \tfrac{6\cdot2}{36} = \tfrac{1}{3}, \quad \mathsf{P}(S_4) = \tfrac{9}{36} = \tfrac{1}{4}.$$

Koristeći dobijene rezultate kao i osobine verovatnoće dalje dobijamo

- $Q \cup S_4 = S_4 + \{(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)\} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(Q \cup S_4) = \frac{9+4}{36} = \frac{13}{36}$,
- $S_2S_3 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)\} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(S_2S_3) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$,
- $\mathsf{P}(S_2 \cup S_3) \overset{(1.7)}{=} \mathsf{P}(S_2) + \mathsf{P}(S_3) - \mathsf{P}(S_2S_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$,
- $S_3S_4 = \{(6, 6)\} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(S_3S_4) = \frac{1}{36}$,
- s obzirom da je $S_4 \subseteq S_2$ tj. $S_4 \subseteq S_2 \cup S_3$, dobijamo
  $\mathsf{P}(S_2 \cup S_3 \cup S_4) = \mathsf{P}(S_2 \cup S_3) = \frac{2}{3}$,
- $\mathsf{P}(\overline{S_2 \cup S_3}) \overset{(1.2)}{=} = 1 - \mathsf{P}(S_2 \cup S_3) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

[34] *Na osam listića papira se napisani brojevi* 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, *i na slučajan način se odabiraju dva listića. Izračunati verovatnoću da će zbir brojeva sa odabranih listića biti veći od* 15.

Rešenje: Svaki od jednakoverovatnih elementarnih ishoda (izbor je slučajan) predstavlja izbor 2 od 8 ispisanih brojeva pri čemu redosled 2 odabrana broja nije bitan, te sledi da je ukupan broj mogućih elementarnih ishoda $\mathrm{C}_2^8 = \binom{8}{2} = 28$. Dakle, $\Omega = \{\{i,j\} \mid i,j \in \{2,4,6,7,8,11,12,13\} \wedge i < j\}$, i $|\Omega| = 28$. Događaj „*zbir brojeva sa odabranih listića će biti veći od* 15" je skup elementarnih ishoda

$$A = \{\{4,12\},\{4,13\},\{6,11\},\{6,12\},\{6,13\},\{7,11\},\{7,12\},$$
$$\{7,13\},\{8,11\},\{8,12\},\{8,13\},\{11,12\},\{11,13\},\{12,13\}\},$$

te se koristeći (1.18) dobija

$$\mathsf{P}(A) = \tfrac{|A|}{|\Omega|} = \tfrac{14}{28} = \tfrac{1}{2}.$$

---

[35] *Kockica za igru se baca* 3 *puta. Izračunati verovatnoće sledećih događaja:*

A - „*jedinica će pasti na bar jednoj kockici*",
B - „*u sva tri bacanja će pasti različiti brojevi*",
C - „*na bar dve kockice će pasti parni brojevi*".

Rešenje: Skup elementarnih događaja je $\Omega = \{(i,j,k) \mid i,j,k \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ gde je (i,j,k) događaj „*pri prvom bacanju će pasti broj i, pri drugom j, a pri trećem k*", te je $|\Omega| = \overline{\mathrm{V}}_3^6 = 6^3 = 216$. Verovatnoće događaja A, B, C izračunavamo koristeći (1.18) (vidi zadatak [31]), pri čemu ćemo broj „povoljnih" elementarnih ishoda izračunavati kombinatornim putem. Pri tome događaj C razlažemo na disjunktne događaje C_2 - „*parni brojevi će pasti na tačno dve kockice*" (na prvoj i drugoj, na prvoj i trećoj, ili na drugoj i trećoj) i C_3 - „*parni brojevi će pasti na sve tri kockice*". Tako dobijamo

$\mathsf{P}(A) \overset{(1.2)}{=} 1 - \mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{\overline{\mathrm{V}}_3^5}{216} = 1 - \frac{5^3}{216} = \frac{91}{216} \approx 0.4213$ ($\overline{A}$ je događaj „*sva tri puta će pasti broj različit od* 1*, tj. broj iz skupa* $\{2,3,4,5,6\}$"),

$\mathsf{P}(B) = \frac{\mathrm{V}_3^6}{216} = \frac{6\cdot5\cdot4}{216} = \frac{120}{216} \approx 0.5556$,

$\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(C_2 + C_3) = \mathsf{P}(C_2) + \mathsf{P}(C_3) = 3\frac{\overline{\mathrm{V}}_1^3\,\overline{\mathrm{V}}_2^3}{216} + \frac{\overline{\mathrm{V}}_3^3}{216} = \frac{81}{216} + \frac{27}{216} = \frac{108}{216} = 0.5$ (C_2 je događaj „*na jednoj od tri kockice će pasti broj iz skupa* $\{1,3,5\}$ *a na dve broj iz skupa* $\{2,4,6\}$", a C_3 je događaj „*sva tri puta će pasti broj iz skupa* $\{2,4,6\}$").

---

[38] *Iz špila od* 52 *karte se nasumice izvlače* 3 *karte. Izračunati verovatnoće sledećih događaja:*

A - „*izvući će se trojka, sedmica i kec*",
B - „*izvući će se tačno jedan kec*",
C - „*izvući će se bar jedan kec*",
D - „*izvući će se najviše dva keca*",
E - „*među izvučenim kartama biće tačno jedan kec i tačno dve tref karte*",

Rešenje: Iz opisa događaja vidimo da nije bitan redosled izvučenih karata, te je skup elementarnih ishoda $\Omega = \{\{i,j,k\} \mid i,j,k \in K \wedge i \neq j \wedge i \neq k \wedge j \neq k\}$ gde je K skup karata, tako da je $|\Omega| = \mathrm{C}_3^{52} = \frac{52!}{3!49!} = \frac{50\cdot51\cdot52}{6} = 22100$. Takođe je očigledno da su elementarni ishodi jednakoverovatni, te verovatnoće navedenih događaja izračunavamo korišćenjem (1.18) (vidi zadatak [31]).

- Elementarni ishodi od kojih se sastoji događaj A se realizuju kada biramo po jednu kartu iz skupa od 4 trojke, 4 sedmice i 4 keca, te primenom pravila proizvoda dobijamo

  $\mathsf{P}(A) = \frac{\mathrm{C}_1^4 \cdot \mathrm{C}_1^4 \cdot \mathrm{C}_1^4}{22100} = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1}}{22100} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{22100} \approx 0.0029.$

- Elementarni ishodi od kojih se sastoji događaj B se realizuju kada biramo jednu kartu iz skupa od 4 keca i dve karte iz skupa od ostalih $52 - 4 = 48$ karata, te primenom pravila proizvoda dobijamo

  $\mathsf{P}(B) = \frac{\mathrm{C}_1^4 \cdot \mathrm{C}_2^{48}}{22100} = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{48}{2}}{22100} = \frac{4 \cdot 1128}{22100} \approx 0.2042.$

- Prvi način: predstavimo C kao uniju disjunktnih događaja $C = C_1 + C_2 + C_3$ gde je C_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ događaj „*biće izvučeno tačno i kečeva*". Koristeći isti princip prebrojavanja kao kod događaja A i B dobijamo

  $|C_1| = \mathrm{C}_1^4 \cdot \mathrm{C}_2^{48} = \binom{4}{1} \cdot \binom{48}{2} = 4512,$

  $|C_2| = \mathrm{C}_2^4 \cdot \mathrm{C}_1^{48} = \binom{4}{2} \cdot \binom{48}{1} = 288,$

  $|C_3| = \mathrm{C}_3^4 \cdot \mathrm{C}_0^{48} = \binom{4}{3} \cdot \binom{48}{0} = 4$

  te je $|C| = |C_1| + |C_2| + |C_3| = 4804$, pa sledi

  $\mathsf{P}(C) = \frac{4804}{22100} \approx 0.2174.$

  Drugi način: $\mathsf{P}(C) = 1 - \mathsf{P}(\overline{C})$, gde je $|\overline{C}|$ broj načina da se iz skupa od 48 karata među kojima nema ni jednog keca izaberu 3 karte. Dakle, $|\overline{C}| = \mathrm{C}_3^{48} = 17296$, te je

  $\mathsf{P}(C) = 1 - \frac{17296}{22100} \approx 0.2174.$

- $\mathsf{P}(D) = 1 - \mathsf{P}(\overline{D})$, gde je D događaj „*biće izvučena tri keca*", tj. $|\overline{D}|$ broj načina da se iz skupa od 4 keca izaberu 3 karte. Dakle, $|\overline{D}| = \mathrm{C}_3^4 = 4$, te je

  $\mathsf{P}(D) = 1 - \frac{4}{22100} \approx 0.9998.$

- Podelimo skup karata na sledeća 4 disjunktna skupa:

  S_1 - skup koji čini samo kec-tref,

  S_2 - skup koji čine tri preostala keca (pik, karo i tref),

  S_3 - skup koji čine sve tref karte bez keca-tref (ima ih $\frac{52}{4} - 1 = 12$),

  S_4 - skup koji čini sve preostale karte (ima ih $52 - 1 - 3 - 12 = 36$).

  Događaj E se može predstaviti kao $E = E_1 + E_2$ gde je E_1 događaj „*biće izvučeni kec tref, jedna karta iz skupa S_3, i jedna karta iz S_4*" a E_2 je događaj „*biće izvučeni jedan kec iz skupa S_2, i dve karte iz skupa S_3*". Na osnovu pravila proizvoda je

  $|E_1| = |S_1| \cdot |S_3| \cdot |S_4| = \binom{1}{1} \cdot \binom{12}{1} \cdot \binom{36}{1} = 1 \cdot 12 \cdot 36 = 432,$

  $|E_2| = |S_2| \cdot \mathrm{C}_2^{|S_3|} = \binom{3}{1} \cdot \binom{12}{2} = 3 \cdot 66 = 198.$

  Skupovi E_1 i E_2 su disjunktni, te je

  $$\mathsf{P}(E) = \frac{|E_1| + |E_2|}{22100} = \frac{630}{22100} \approx 0.0285.$$

[36] *Bacaju se dve kockice za igru, a iz kutije koja sadrži 3 bele i 4 crne kuglice izvlače se odjednom dve kuglice. Koji je od događaja*

A - *„na kockicama će pasti jednaki brojevi, ili brojevi čiji je zbir 5",*
B - *„iz kutije će se izvući dve crne kuglice, ili kuglice različitih boja"*

verovatniji?

Rešenje: Skup elementarnih ishoda pri bacanju kockica je

$$\Omega_1 = \{(i,j) \mid i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\},$$

pri čemu su svi elementarni ishodi $(i,j) \in \Omega$ jednakoverovatni i njihov ukupan broj je $|\Omega_1| = \overline{\mathrm{V}}_2^6 = 6^2 = 36$. Pošto je

$$A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\},$$

sledi $\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{36} = \frac{10}{36} \approx 0.2778$.

S druge strane, skup elementarnih ishoda pri izvlačenju kuglica je

$$\Omega_2 = \{\{i,j\} \mid i,j \in K \ \wedge \ i \neq j\}$$

gde je K skup kuglica koje se nalaze u kutiji, te je $|\Omega_2| = \mathrm{C}_2^{3+4} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = 21$ pri čemu su svi elementarni ishodi jednakoverovatni. Događaj B možemo predstaviti kao $B = B_1 + B_2$ gde je B_1 događaj „*iz kutije će se izvući dve crne kuglice*" a B_2 je događaj „*iz kutije će se izvući kuglice različitih boja*", te je

$$|B| = |B_1| + |B_2| = \mathrm{C}_0^3 \cdot \mathrm{C}_2^4 + \mathrm{C}_1^3 \cdot \mathrm{C}_1^4 = \binom{3}{0} \cdot \binom{4}{2} + \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1} = 1 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 18$$

(brojevi $|B_1|$ i $|B_2|$ su izračunati pomoću pravila proizvoda - biramo 0 tj. 1 element iz skupa belih, i 2 tj. 1 element iz skupa crnih kuglica). Primenom (1.18) sledi da je $\mathsf{P}(B) = \frac{18}{21} \approx 0.8571$.

Dakle, $\mathsf{P}(B) \approx 0.8571 > \mathsf{P}(A) \approx 0.2778$, tj. događaj B je verovatniji.

---

[37] *Neka osoba je zaboravila poslednje dve cifre nekog telefonskog broja, ali se pouzdano seća da su te dve cifre različite. Izračunati verovatnoću da će iz prvog pokušaja pogoditi te dve cifre.*

Rešenje: Pošto nema dodatnih informacija, podrazumeva se da se poslednje dve cifre pogađaju nasumice, što znači da su mogući elementarni ishodi jednakoverovatni. Elementarni ishodi su uređeni parovi cifara (kod telefonskog broja je bitan redosled cifara) i postoji samo jedan „povoljan" elementarni ishod za događaj A - „*osoba će iz prvog pokušaja pogoditi poslednje dve cifre*", te korišćenjem (1.18) (vidi zadatak [31]) dobijamo $\mathsf{P}(A) = \frac{1}{\mathrm{V}_2^{10}} = \frac{1}{90} \approx 0.0111$ (broj „mogućih" ishoda je broj varijacija bez ponavljanja V_2^{10} jer je bitan poredak cifara, cifre treba da su različite i biraju se 2 cifre iz skupa od 10 cifara).

---

[39] *U posudi se nalazi 9 belih, 8 crvenih i 7 žutih kuglica. Izvlači se 8 kuglica odjednom. Izračunati verovatnoću da će biti izvučene 2 bele, 4 crvene i 2 žute kuglice.*

Rešenje: Kuglice se izvlače odjednom, što znači da redosled izvučenih kuglica nije bitan. Stoga je skup mogućih elementarnih ishoda skup 8-elementnih podskupova skupa kuglica u posudi, tj.

$$\Omega = \{A \mid A \subseteq \Omega \ \wedge \ |A| = 8\}$$

pri čemu je $|\Omega| = \mathrm{C}_8^{9+8+7} = \mathrm{C}_8^{24} = 735471$ (dakle, koristimo takav način prebrojavanja mogućih i povoljnih elementarnih ishoda pri kojem razlikujemo između sebe i kuglice istih boja). „Povoljni" izbori su oni kod kojih biramo 2 iz skupa od 9 belih kuglica, 4 iz skupa od 8 crvenih kuglica, i 2 iz skupa od 7 žutih kuglica, te se koristeći pravilo proizvoda dobija da takvih izbora („povoljnih" elementarnih ishoda) ukupno ima $\mathrm{C}_2^9 \cdot \mathrm{C}_4^8 \cdot \mathrm{C}_2^7 = \binom{9}{2} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{7}{2} = 36 \cdot 70 \cdot 21 = 52920$, te se na osnovu (1.18) (s obzirom na formirani model i slučajan izbor kuglica, elementarni ishodi su jednakoverovatni) sledi da tražena verovatnoća iznosi $p = \frac{52920}{735471} \approx 0.0720$.

---

[40] *Bacaju se bela i plava kockica za igru. Izračunati verovatnoće sledećih događaja:*

A - *„zbir palih brojeva biće manji od 9",*
B - *„na obe kockice će pasti isti broj",*
C - *„na beloj kockici će pasti broj veći nego na plavoj",*
D - *„na plavoj kockici će pasti broj za dva veći od broja na beloj kockici",*
E - *„na obe kockice će pasti parni brojevi čiji je zbir bar 8",*
F - *„bar na jednoj kockici će pasti broj 6".*

Rešenje: S obzirom da se podrazumeva da su kockice pravilnog oblika, elementarni događaji su jednakoverovatni, i skup elementarnih događaja je

$$\Omega = \{(i,j) \mid i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\},$$

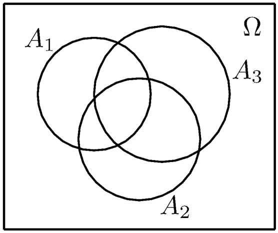
gde je (i,j) događaj „*na beloj kockici će pasti broj i, a na plavoj kockici će pasti broj j*", pri čemu je njihov broj $|\Omega| = \overline{\mathrm{V}}_2^6 = 6^2 = 36$. Za svaki od navedenih događaja X ćemo odrediti broj elementarnih događaja od kojih se X sastoji, te se na osnovu (1.18) dobija $\mathsf{P}(X) = \dfrac{|X|}{|\Omega|} = \dfrac{|X|}{36}$.

- $|A| = |\Omega| - |\overline{A}| =$
  $$= 36 - |\{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}| =$$
  $$= 36 - 10 = 26 \qquad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(A) = \tfrac{26}{36} = \tfrac{13}{18} \approx 0.7222,$$
- $|B| = |\{(i,i) \mid i \in \{1,2,3,4,5,6\}\}| = 6 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0.1667,$
- $|C| = |\{(i,j) \mid i,j \in \{1,2,3,4,5,6\} \ \wedge \ i > j\}| = 5+4+3+2+1 = 15$
  $\Rightarrow \quad \mathsf{P}(C) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \approx 0.4167,$
- $|D| = |\{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}| = 4 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(D) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0.1111,$
- $|E| = |\{(2,6),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}| = 6 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0.1667,$
- $|F| = |\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1)\}| =$
  $= 11$
  $\Rightarrow \quad \mathsf{P}(F) = \frac{11}{36} \approx 0.3056.$

---

[41] *Projektna firma je učestvovala na tri konkursa, na svakom sa po jednim projektom. Neka su A_i, $i \in \{1,2,3\}$ događaji „biće prihvaćen projekat na i-tom konkursu", i poznato je da je* $\mathsf{P}(A_1) = 0.22$, $\mathsf{P}(A_2) = 0.25$, $\mathsf{P}(A_3) = 0.28$, $\mathsf{P}(A_1A_2) = 0.11$, $\mathsf{P}(A_1A_3) = 0.05$, $\mathsf{P}(A_2A_3) = 0.07$ *i* $\mathsf{P}(A_1A_2A_3) = 0.01$. *Opisati rečima i izračunati verovatnoće sledećih događaja $A_1 \cup A_2$, $\overline{A}_1\overline{A}_2$, $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ i $\overline{A}_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$.*

Rešenje:



- $A_1 \cup A_2$ je događaj „*biće prihvaćen projekat bar na jednom od prva dva konkursa*", i važi

  $$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2) \overset{(1.7)}{=} \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) - \mathsf{P}(A_1A_2) = 0.22 + 0.25 - 0.11 = 0.36.$$

- $\overline{A}_1\overline{A}_2$ je događaj „*neće biti prihvaćen projekat ni na jednom od prva dva konkursa*", i važi

  $$\mathsf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2) = \mathsf{P}(\overline{A_1 \cup A_2}) \overset{(1.2)}{=} 1 - \mathsf{P}(A_1 \cup A_2) = 1 - 0.36 = 0.64.$$

- $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ je događaj „*biće prihvaćen bar jedan projekat*", i važi

  $$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \overset{(1.8)}{=}$$
  $$= \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) + \mathsf{P}(A_3) - \mathsf{P}(A_1A_2) - \mathsf{P}(A_1A_3) - \mathsf{P}(A_2A_3) + \mathsf{P}(A_1A_2A_3) =$$
  $$= 0.75 - 0.23 + 0.01 = 0.53.$$

- $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ je događaj „*neće biti prihvaćen projekat ni na jednom konkursu*", i važi

  $$\mathsf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = \mathsf{P}(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) \overset{(1.2)}{=} 1 - \mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - 0.53 = 0.47.$$

- $\overline{A}_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$ je događaj „*projekat neće biti prihvaćen na A_1 i A_2 ili na A_3* "

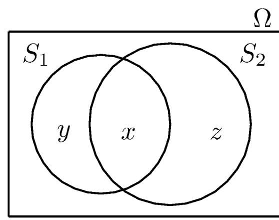
  $$\mathsf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_3) \overset{(1.7)}{=} \mathsf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2) + \mathsf{P}(\overline{A}_3) - \mathsf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) \overset{(1.2)}{=} 0.64 + (1 - \mathsf{P}(A_3)) - 0.47 =$$
  $$= 0.64 + 0.72 - 0.47 = 0.89.$$

[42] *Na putu do posla inženjer prolazi pored dva semafora. Verovatnoća da će se morati zaustaviti kod prvog iznosi* 0.4, *a kod drugog* 0.5. *Takođe je poznato da verovatnoća da će morati da se zaustavi bar kod jednog semafora iznosi* 0.6. *Izračunati verovatnoće događaja*

A - *„inženjer će morati da se zaustavi kod oba semafora”,*
B - *„inženjer će morati da se zaustavi samo kod prvog semafora”,*
C - *„inženjer će morati da se zaustavi kod tačno jednog semafora”.*

Rešenje: Označimo sa S_i, $i = \{1,2\}$ događaj ”*inženjer će morati da se zaustavi kod i-tog semafora*”. Na osnovu datih podataka $\mathsf{P}(S_1) = 0.4$, $\mathsf{P}(S_2) = 0.5$ i $\mathsf{P}(S_1 \cup S_2) = 0.6$ izračunavamo

- $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(S_1 S_2) \overset{(1.9)}{=} \mathsf{P}(S_1) + \mathsf{P}(S_2) - \mathsf{P}(S_1 \cup S_2) = 0.4 + 0.5 - 0.6 = 0.3,$
- $\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(S_1 \overline{S}_2) = \mathsf{P}(S_1 \setminus S_1 S_2) \overset{(1.5)}{=} \mathsf{P}(S_1) - \mathsf{P}(S_1 S_2) = 0.4 - 0.3 = 0.1,$
- $\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(S_1 \overline{S}_2 + \overline{S}_1 S_2) \overset{(1.13)}{=} \mathsf{P}(S_1 \overline{S}_2) + \mathsf{P}(\overline{S}_1 S_2) = 0.1 + \mathsf{P}(S_2 \setminus S_1 S_2) \overset{(1.5)}{=}$
  $= 0.1 + (\mathsf{P}(S_2) - \mathsf{P}(S_1 S_2)) = 0.1 + (0.5 - 0.3) = 0.3.$



Komentar: verovatnoću možemo često interpretirati grafički; verovatnoću nekog događaja $X \subseteq \Omega$ *možemo predstaviti kao meru oblasti (npr. „površine”)* Ω, *izraženo u procentima* p *odnosno odgovarajućem broju* $\frac{p}{100} \in [0,1]$; *u ovom zadatku (vidi sliku) bi to značilo:* $\mathsf{P}(S_1 S_2) = x$, $\mathsf{P}(S_1 \overline{S}_2) = y$, $\mathsf{P}(\overline{S}_1 S_2) = z$,

$\mathsf{P}(S_1) = x + y = 0.4,\quad \mathsf{P}(S_2) = x + z = 0.5,\quad \mathsf{P}(S_1 \cup S_2) = x + y + z = 0.6,$

te rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 0.4 \\ x & & & + & z & = & 0.5 \\ x & + & y & + & z & = & 0.6 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 0.4 \\ & - & y & + & z & = & 0.1 \\ & & & & z & = & 0.2 \end{array}$$

dobijamo $z = 0.2$, $y = 0.1$, $x = 0.3$, *odnosno*

$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(S_1 S_2) = x = 0.3,$

$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(S_1 \overline{S}_2) = y = 0.1,$

$\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(\overline{S}_1 S_2 + S_1 \overline{S}_2) = \mathsf{P}(\overline{S}_1 S_2) + \mathsf{P}(S_1 \overline{S}_2) = z + y = 0.3.$

3. Uslovna vjerovatnoća

Pretpostavimo da želimo baciti dvije kockice i da svih 36 mogućnosti za izlaz imaju istu šansu da se pojave, tj. imaju vjerovatnoću $\frac{1}{36}$. Pretpostavimo da smo primjetili da je prva kockica 4. Tada, ako imamo ovu informaciju, kolika je vjerovatnoća da suma dvije kockice bude jednako 6? Da bi izračunali ovu vjerovatnoću, rezonujemo na sljedeći način: Kako nam je dato da je prva kockica 4, slijedi da može biti najviše šest mogućnosti za izlaz u našem eksperimentu, naime, $(4,1)$, $(4,2)$, $(4,3)$, $(4,4)$, $(4,5)$ i $(4,6)$. Kako svaka od ovih izlaza orginalno ima istu vjerovatnoću pojavljivanja, one bi i dalje trebale imati jednaku vjerovatnoću. To jest, ako je dato da je prva kockica četri, tada (uslovna) vjerovatnoća svakih od izlaza $(4,1)$, $(4,2)$, $(4,3)$, $(4,4)$, $(4,5)$, $(4,6)$ je $\frac{1}{6}$ dok je (uslovna) vjerovatnoća ostalih 30 tački iz prostora uzoraka 0. Prema tome, željena vjerovatnoća će biti $\frac{1}{6}$.

Ako E označava događaj da je suma dvije bačene kockice 6, a F označava događaj da je prva bačena kocka četri, tada vjerovatnoću upravo dobijenu nazivamo uslovna vjerovatnoća da se pojavi E ako je dato F se već pojavilo i ovo označavamo sa $P(E|F)$.

Vrijedi formula:
$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}.$$

(#) Posmatrajmo eksperiment u kome bacamo dvije kockice jednu iza druge. Nakon bacanja smo primjetili da je prva kockica 4. Kolika je vjerovatnoća da suma dvije kockice bude jednako 6?

Rj. Kako nam je dato da je prva kockica 4, to slijedi da može biti najviše šest mogućnosti za izlaz u našem eksperimentu, naime

$$(4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6)$$

Kako svaki od ovih izlaza ima istu vjerovatnoću to je

$$P(\{\text{suma dvije kockice} = 6\}) = P(\{(4,2)\}) = \frac{1}{6}.$$

Primjetimo da je vjerovatnoća ostalih 30 tački iz prostora uzoraka jednako nuli.

(#) Pretpostavimo da se u šeširu nalaze karte sa brojevima od jedan do deset, da su izmješane i da izvlačimo jednu kartu. Ako znamo da je broj na izvučenoj karti najmanje pet, izračunati kolika je uslovna vjerovatnoća da je broj na karti 10?

Rj.

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Svaki od ovih događaja ima vjerovatnoću $\frac{1}{10}$, tj.

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \ldots = P(\{10\}) = \frac{1}{10}$$

Neka je E događaj da je broj na izvučenoj karti 10. Tada

$$P(E) = P(\{10\}) = \frac{1}{10}.$$

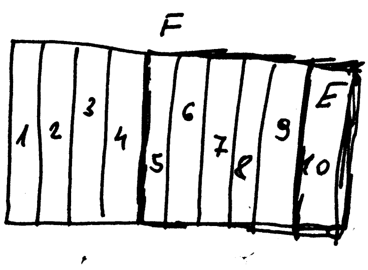
Neka je F događaj da je izvučena karta najmanje 5. Tada

$$P(F) = P(\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}) = \frac{6}{10}.$$

Ono što mi želimo izračunati je $P(E|F)$.

Koristićemo jednakost

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)};$$



$EF = E$ (broj na karti će biti oboje i 10 i najmanje 5 akko je broj jednak 10)

Time

$$P(E|F) = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{1}{6}.$$

(#) Neka familija ima dvoje djece. Kolika je uslovna vjerovatnoća da su oba djeteta dječaci, ako nam je dato da je najmanje jedno dijete dječak?

Rj.

Prostor uzoraka u ovom slučaju je

b - dječak

g - djevojčica

$$S = \{(b,b),(b,g),(g,b),(g,g)\}.$$

i svi izlazi su jednako mogući (npr. (b,g) znači, da je starije dijete dječak a mlađe dijete djevojčica).

$$P(\{(b,b)\}) = \frac{1}{4}, \quad P(\{(b,g)\}) = \frac{1}{4}, \quad P(\{(g,b)\}) = \frac{1}{4}, \quad P(\{(g,g)\}) = \frac{1}{4}.$$

Neka B označava događaj da su oba djeteta dječaci. Tada

$$P(B) = P(\{(b,b)\}) = \frac{1}{4}$$

Neka A označava događaj da je najmanje jedno dijete dječak. Tada

$$P(A) = P(\{(b,b),(b,g),(g,b)\}) = \frac{3}{4}$$

Mi trebamo izračunati $P(B|A)$. Koristimo formulu

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)}$$

Imamo

$$P(B|A) = \frac{P(\{(b,b)\})}{P(\{(b,b),(b,g),(g,b)\})} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

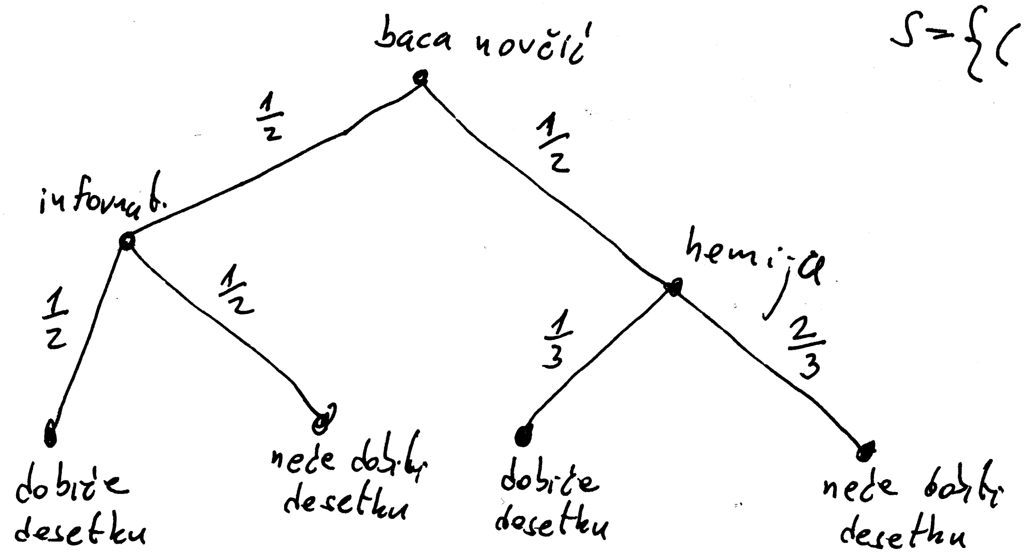
Suljo kao izborni predmet može izabrati kurs iz informatike ili iz hemije. Ako Suljo izabere kurs iz informatike, tada vjerovatnoća da predmet položi sa desetkom u indeksu iznosi $\frac{1}{2}$; a ako izabere kurs iz hemije vjerovatnoća da dobije desetku iznosi $\frac{1}{3}$. On je odlučio da ovu važnu odluku donese bacanjem običnog novčića. Kolika je vjerovatnoća da Suljo dobije desetku iz hemije.

Rj.

Zadatak se može uraditi na više načina.

I način

Formirajmo prostor uzoraka S.



$$S = \{(i,10), (i,<10), (h,10), (h,<10)\}$$

gdje

$$P(\{(i,10)\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\{(i,<10)\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\{(h,10)\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\{(h,<10)\}) = \frac{2}{6}$$

tražena vjerovatnoća

II način

Označimo sa A i C sljedeće događaje

C – događaj da Suljo izabere kurs iz hemije

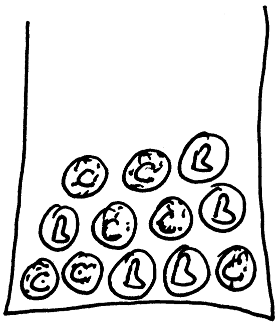
A – događaj da dobije desetku bez obzira koji kurs izabere

Mi trebamo odrediti $P(AC)$. Iz $P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)} \Rightarrow$

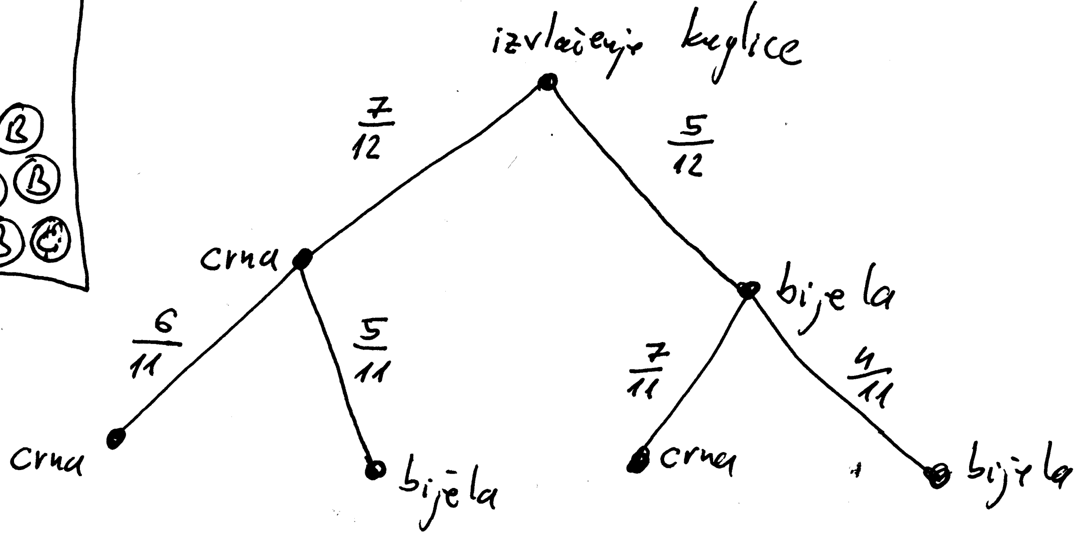
$$\Rightarrow P(AC) = P(C)P(A|C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

\# Pretpostavimo da kutija sadrži sedam crnih kuglica i pet bijelih kuglica. Dvije kuglice izvlačimo iz kutije bez njihovog vraćanja nazad. Ako pretpostavimo da svaka kuglica u kutiji ima jednaku vjerovatnoću da bude izvučena, izračunati vjerovatnoću da obe izvučene kuglice budu crne?

Rj.



I način:



Prostor uzoraka je $S=\{(C,C),(C,B),(B,C),(B,B)\}$ gdje je npr. (B,C) znači da je prva izvučena kuglica bijela, a druga izvučena kuglica crna

$$P(\{(C,C)\}) = \frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11} = \frac{42}{132}$$

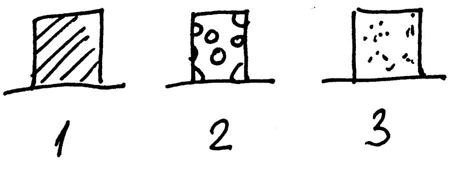
II način:

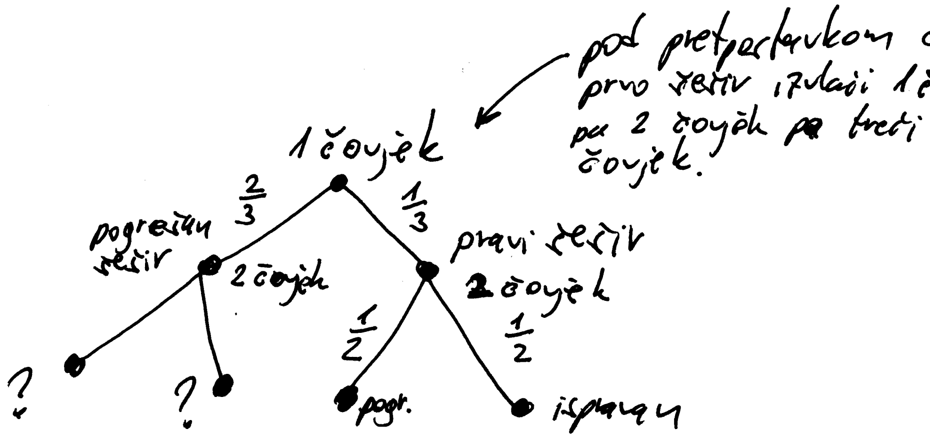
Sa F označimo događaj da je prva izvučena kuglica crna, a sa E označimo događaj da je druga izvučena kuglica crna. Sad, ako je dato da je prva izvučena kuglica crna, ostalo je šest crnih kuglica i pet bijelih pa je $P(E|F)=\frac{6}{11}$. Kako je $P(F)=\frac{7}{12}$ to je

$$P(EF) = P(E)P(E|F) = \frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11} = \frac{42}{132}$$

(#) Pretpostavimo da su neka tri čovjeka na zabavi bacili svoj šešir u centar sobe. Šeširi su se prvo izmješali a onda je svaki čovjek na slučajan način izabrao šešir. Kolika je vjerovatnoća da ni jedan od tri čovjeka nisu izabrala svoj vlastiti šešir?

Rj.





Sa E_1, E_2, E_3 označimo sljedeće događaje

E_1 - događaj da je prvi čovjek izabrao svoj šešir

E_2 - događaj da je drugi čovjek izabrao svoj šešir

E_3 - događaj da je treći čovjek izabrao svoj šešir

Tada

$$P(E_1) = \frac{1}{3}, \quad P(E_2) = \frac{1}{3}, \quad P(E_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(E_1 E_2) = P(E_1) P(E_2|E_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, \quad P(E_1 E_3) = P(E_2 E_3) = \frac{1}{6}$$

$$P(E_1 E_2 E_3) = P(E_1 E_2) P(E_3 | E_1 E_2) = \frac{1}{6} \underbrace{P(E_3|E_1E_2)}_{=1} = \frac{1}{6}$$

Prvo ćemo izračunati komplementarnu vjerovatnoću tj. da je najmanje jedan čovjek izabrao svoj vlastiti šešir $(P(E_1) \cup P(E_2) \cup P(E_3))$.

Koristimo sljedeću formulu

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1E_2) - P(E_1E_3) - P(E_2E_3) + P(E_1E_2E_3)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Odavdje, vjerovatnoća da nijedan čovjek nije izabrao svoj šešir je $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

[48] *Koliko iznosi verovatnoća da iz špila od 32 karte 3 puta zaredom izvučemo kralja ako*

(a) *izvučenu kartu svaki put vraćamo u špil,*

(b) *izvučene karte ne vraćamo u špil?*

Rešenje: Označimo sa A_i, $i \in \{1,2,3\}$ događaj „*pri i-tom izvlačenju će biti izvučen kralj*". Događaj A: „3 *puta zaredom će biti izvučen kralj*" možemo predstaviti kao $A = A_1A_2A_3$, te na osnovu (1.15) sledi

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A_1A_2A_3) = \mathsf{P}(A_1)\,\mathsf{P}(A_2|A_1)\,\mathsf{P}(A_3|A_1A_1)$$

(a) ako izvučene karte svaki put vraćamo u špil, tada svaki put izvlačimo iz špila sa istim sadržajem kao i pri prvom izvlačenju, što znači da su događaji A_i nezavisni, te sledi da je $\mathsf{P}(A_2|A_1) = \mathsf{P}(A_2) = \mathsf{P}(A_1)$ i $\mathsf{P}(A_3|A_1A_2) = \mathsf{P}(A_3) = \mathsf{P}(A_1)$, odnosno

$\mathsf{P}(A) = (\mathsf{P}(A_1))^3 = (\frac{4}{32})^3 = (\frac{1}{8})^3 = \frac{1}{512} \approx 0.0020.$

(b) $\mathsf{P}(A_1) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$,

$\mathsf{P}(A_2|A_1) = \frac{3}{31}$ (ako je u prvom izvlačenju izvučen kralj, tada se drugi put izvlači iz špila od 31 karte u kojem se nalaze 3 kralja),

$\mathsf{P}(A_3|A_1A_2) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ (ako su u prva dva izvlačenja izvučeni kraljevi, tada se treći put izvlači iz špila od 30 karata u kojem se nalaze 2 kralja),

$\mathsf{P}(A) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{31} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{1240}$.

---

[49] *U kutiji se nalaze* 3 *zelene i* 4 *bele kuglice. Pera izvlači* 3 *puta po jednu kuglicu iz kutije*

(a) *bez vraćanja izvučene kuglice u kutiju,*

(b) *sa vraćanjem izvučene kuglice u kutiju.*

Izračunati verovatnoću događaja A–„Pera će izvući bar jednu kuglicu bele boje".

Rešenje: Prvo ćemo izračunati verovatnoću suprotnog događaja, tj. događaja $\bar{A}$–„*Pera neće izvući nijednu kuglicu bele boje*", pa pomoću njega verovatnoću traženog događaja. Označimo sa Z_i događaj „*u i-tom izvlačenju Pera je izvukao kulicu zelene boje*", $i = 1,2,3$. Tada je $\overline{A} = Z_1\,Z_2\,Z_3$ i $\mathsf{P}(\overline{A}) = \mathsf{P}(Z_1\,Z_2\,Z_3)$.

(a) Pera izvlači kuglicu bez vraćanja prethodno izvučene kuglice u kutiju, tako da izvlačenja nisu nezavisna i

$$\mathsf{P}\left(\overline{A}\right) = \mathsf{P}(Z_1Z_2Z_3) = \mathsf{P}(Z_1)\,\mathsf{P}(Z_2|Z_1)\,\mathsf{P}(Z_3|Z_1Z_2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{35},$$

odakle sledi $\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}\left(\overline{A}\right) = \frac{34}{35}$.

(b) Pera izvlači kuglicu tako što svaki put vrati predhodno izvučenu kuglicu u kutiju, te su izvlačenja međusobno nezavisna tako da je $\mathsf{P}(Z_2|Z_1) = \mathsf{P}(Z_2) = \mathsf{P}(Z_1)$, $\mathsf{P}(Z_3|Z_1Z_2) = \mathsf{P}(Z_3) = \mathsf{P}(Z_1)$, tako da je

$$\mathsf{P}\left(\overline{A}\right) = \mathsf{P}(Z_1)^3 = \left(\frac{3}{7}\right)^3,$$

odakle je $\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \left(\frac{3}{7}\right)^3 \approx 0.921282799.$
